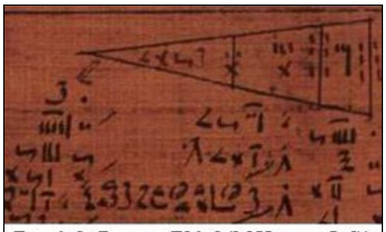
304 / 305 – DM 02 – LUNDI 17 OCTOBRE 2016

Effectuer une séquence de calculs avec des fractions	☹	😐	☺	☺☺
Résoudre un problème avec des fractions	☹	😐	☺	☺☺
Calculer une expression littérale	☹	😐	☺	☺☺

Les documents mathématiques de l'Egypte antique sont rares. Le papyrus Rhind, de la seconde période intermédiaire aurait été écrit par le scribe Ahmes. Son nom vient de l'Écossais Alexander Henry Rhind (1833-1863) qui l'acheta en 1858 à Louxor. Il aurait été découvert sur le site de la ville de Thèbes. Actuellement conservé au British Museum (Londres), il contient 87 problèmes résolus d'arithmétique, d'algèbre, de géométrie et d'arpentage, sur plus de 5 m de longueur et 32 cm de large. Ahmes indique que son papyrus est, en partie, une copie de résultats plus anciens (vers 2 000 av. J.-C.) remontant aux Babyloniens.



Extrait du Papyrus Rhind (1650 avant J.-C.)

Définition (D1) – Fraction égyptienne

Une fraction égyptienne est une fraction dont le numérateur est égal à 1.

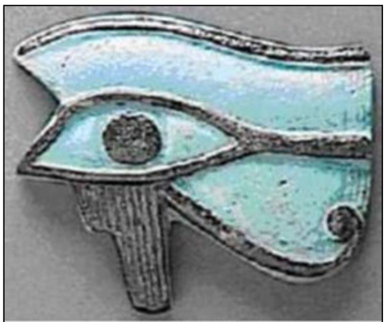
Propriété (P1) - Décomposition

N'importe quelle fraction peut se décomposer en une somme de fractions égyptiennes distinctes.

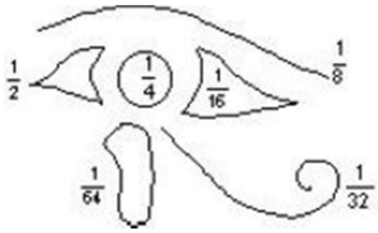
EXERCICE 1 L'œil Oudjat

A propos des fractions égyptiennes, il existe un épisode sanglant de la mythologie : Au cours d'un combat Seth (Dieu de la violence) arracha un œil à son neveu Horus (Dieu à tête de faucon et à corps d'homme). Il le partaga en 6 morceaux et le jetta dans le Nil. Cet œil est appelé Oudjat. Les six morceaux sont la petite pyramide $\frac{1}{2}$, le Soleil $\frac{1}{4}$, la grande pyramide $\frac{1}{16}$, la ligne de sol $\frac{1}{8}$, le bloc poussé par l'égyptien $\frac{1}{64}$ et la ligne recourbée $\frac{1}{32}$. Thot (Dieu humain) reconstitua l'œil, symbole du bien contre le mal mais la somme de ces parts n'était pas égale à 1 (l'œil entier). Il accordait le $64^{\text{ème}}$ manquant à tout scribe recherchant et acceptant sa protection.

Calculer la somme A des fractions de l'œil Oudjat.



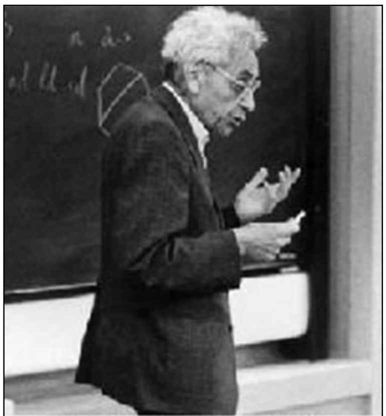
L'oeil Oudjat



EXERCICE 2 La conjecture d'Erdös-Graus

La conjecture des mathématiciens Pavel Erdös et E.G. Graus prétend que toute fraction de numérateur 4 peut s'écrire sous la forme d'une somme de trois fractions égyptiennes distinctes. Autrement dit, pour tout nombre entier n supérieur à 1, il existe trois entiers a, b et c distincts tels que : $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Cette conjecture a été vérifiée pour tous les entiers inférieurs à 1 014 mais reste à démontrer.

1. Vérifier la conjecture pour $n = 5$, $a = 2$, $b = 5$ et $c = 10$.
2. Vérifier la conjecture pour $n = 17$, $a = 6$, $b = 17$ et $c = 102$.



Pavel Erdös (1913-1996)