Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Objectifs

Au cycle 2, l'élève a travaillé sur une géométrie de la perception, partant de l'espace ambiant pour décrire et reproduire des figures planes usuelles, et contrôler leurs propriétés par les sens.

Au cycle 3, l'élève s'est progressivement orienté vers une géométrie où les propriétés des objets sont contrôlées par le recours à des instruments, puis par l'explicitation de ces propriétés. Il a appris à nommer, comparer, reconnaître, décrire, des figures simples ou d'autres plus complexes, telles que : triangles et triangles particuliers (rectangle, isocèle, équilatéral), quadrilatères et quadrilatères particuliers (carré, rectangle, losange), cercle. Il s'est entraîné à reproduire, représenter, construire des figures simples et des configurations planes plus élaborées, à réaliser ou à rédiger un programme de construction. Il a identifié des relations entre objets géométriques et des propriétés de ces objets en mettant en place un vocabulaire adéquat (polygone, côté, sommet, angle, segment, cercle, rayon, diamètre, milieu, médiatrice, hauteur, etc.). L'élève a appris à effectuer des tracés et des constructions correspondant à certaines relations (perpendicularité, parallélisme, égalité de longueurs ou de mesures d'angles, figures symétriques par rapport à un axe de symétrie, symétriques d'une droite, d'un segment, d'un point, médiatrice d'un segment, agrandissement ou réduction). Pour ces constructions, il a utilisé des instruments usuels de tracé (règle graduée, équerre, compas), des supports variés (papier uni, quadrillé ou pointé, calque, gabarits d'angles, bandes de papier), et s'est initié à l'usage de logiciels (géométrie dynamique, initiation à la programmation, visualisation de cartes, de plans).

Au cycle 4, l'élève s'appuie toujours sur une géométrie perçue par les sens et contrôlée par les instruments, mais s'oriente progressivement vers une géométrie où les propriétés des objets sont validées par le raisonnement. Il poursuit et enrichit sa connaissance des figures et configurations clés (triangles, quadrilatères, cercles), et de leurs propriétés géométriques et métriques. La définition et les propriétés de ces configurations sont explicitées avec un formalisme raisonnable, à partir de situations qui en révèlent la nécessité. Les théorèmes de Thalès (classe de 3^{e}) et de Pythagore (classe de 4^{e}), ainsi que les rapports trigonométriques, sont introduits avec progressivité. L'élève entretient sa pratique des problèmes de construction à l'aide des instruments de tracé, la prolonge avec un usage renforcé des outils numériques (géométrie dynamique, programmation) et de l'algorithmique. Les frises, rosaces et pavages sont un terrain fertile pour utiliser ces outils, en liaison avec les transformations de figures. Le repérage sur la droite est introduit en liaison avec les nombres relatifs. Les tracés à la main levée ont toute leur importance, que ce soit pour chercher des conditions nécessaires dans les problèmes de construction, ou pour conduire des raisonnements. Le repérage dans le plan à l'aide des coordonnées cartésiennes est relié aux représentations graphiques (organisation de données, proportionnalité, fonctions). Le repérage sur une carte peut donner l'occasion d'utiliser les coordonnées géographiques. Les différentes formes de raisonnement sont travaillées en formation, notamment le raisonnement déductif. Voir à ce sujet la ressource « Raisonner ».

Lien avec les domaines du socle

Le vocabulaire lié aux objets et notions géométriques (médiatrice, hauteur, inégalité triangulaire, triangles égaux et semblables, rapports trigonométriques, théorèmes de Pythagore et de Thalès) relève de l'utilisation d'un langage mathématique adapté. Le codage des figures est lui-même une autre forme de langage mathématique (domaine 1).

L'écriture d'un protocole est une méthode efficace pour comprendre ou réaliser une construction (domaine 2). Un logiciel de géométrie dynamique est un outil pour construire, déformer ou transformer une figure plane (domaine 2). Établir le lien entre le théorème de Thalès, l'homothétie et la proportionnalité, ainsi qu'avec les triangles semblables, lier parallélisme et translation, ou encore cercle et rotation, se rattachent également au domaine des méthodes d'apprentissage.

Le fait de distinguer un résultat de portée générale d'un cas particulier observé sur une figure, de prouver un résultat général par une démonstration, comme celui de valider ou de réfuter une conjecture, relèvent de la formation de la personne et du citoyen (domaine 3).

Les principaux résultats et connaissances mathématiques de géométrie plane (propriétés des configurations, théorèmes de Pythagore et de Thalès, trigonométrie), ainsi que leur utilisation dans la résolution de problèmes, participent de la culture mathématique de base (domaine 4). Il en va de même de la démonstration, dès lors qu'elle est perçue et utilisée comme une démarche mathématique permettant de prouver un énoncé ou un résultat général.

La modélisation en géométrie plane est une façon de représenter le monde (domaine 5). Certains exemples de situations d'étude du programme, comme les frises, pavages, rosaces, ou encore des méthodes historiques ayant permis d'estimer le rayon de la Terre ou la distance Terre-Lune, illustrent les connexions de la géométrie plane avec des activités humaines (domaine 5).

Progressivité des apprentissages

La pratique des figures usuelles et de leurs propriétés, entamée au cycle 3, est poursuivie et enrichie dès la classe de 5^{e}, et tout au long du cycle 4. Le théorème de Pythagore est introduit en 4^{e}, réinvesti tout au long des classes de 4^{e} et de 3^{e} dans des situations variées du plan et de l'espace. Le théorème de Thalès est introduit en 3^{e}. L'étude des configurations « triangles emboîtés » puis « papillon » permet progressivement d'aboutir à la version générale du théorème, en liaison étroite avec la proportionnalité et l'homothétie ainsi qu'avec les agrandissements et les réductions. L'étude des rapports trigonométriques peut être répartie entre les classes de 4^{e} et de 3^{e}.

Stratégies d'enseignement

De la géométrie perçue à la géométrie abstraite

Du cycle 2 au cycle 4, le contrôle des propriétés géométriques passe de la perception au dessin, puis à une géométrie plus abstraite, contrôlée par le raisonnement, qu'il soit formalisé ou non par une démonstration écrite. Lorsque la géométrie modélise une situation concrète, ou dans la géométrie dessinée[1], les instruments (règle, équerre) peuvent servir à valider une propriété (alignement de points, angle droit). Dans ces cas, les grandeurs sont exprimées par des nombres décimaux : la diagonale d'un carré dessiné de côté 10 cm mesure 14,1 cm, et non pas $10\sqrt{2}$ cm ! Lorsque le professeur propose une situation modélisée par la géométrie plane, les propriétés géométriques établies et les calculs de grandeurs réalisés à l'intérieur du modèle doivent donner l'occasion au professeur d'expliciter ses attentes auprès de l'élève. Ce dernier doit savoir si l'on attend de lui des propriétés et calculs nécessairement exacts et théoriques dans le modèle mathématique, ou des réponses « convenables » dans le monde physique. D'autre part, il est souhaitable que ces attentes soient cohérentes avec la situation initiale : pour le calcul de la diagonale d'un champ rectangulaire, il est déraisonnable – et même inadapté – d'attendre une réponse qui ne s'exprime pas par un nombre décimal. Dans chaque activité, le professeur doit préciser le contrat, notamment s'il attend une propriété théorique ou une valeur exacte.

Pour passer de la géométrie perçue à la géométrie abstraite, le changement de paradigme doit être motivé par des activités qui en montrent la nécessité. Par exemple, le recours à une propriété caractéristique peut être motivé par une figure codée, un programme de construction téléphoné, le jeu du portrait, … ; l'emploi d'une argumentation raisonnée peut l'être en réponse à une question du type « *le triangle est-il à peu près rectangle, ou exactement ?* », par un raisonnement à partir d'une figure à main levée ; etc. Il est plus difficile de motiver un travail avec des valeurs exactes non décimales (rationnels, racines carrées), en dehors de la problématique historique des constructions à la règle et au compas. Sur ce point, il est intéressant de différencier les exigences entre élèves, en prenant en compte ceux qui maîtrisent mal les nombres non décimaux.

Configurations usuelles

- La **médiatrice** d'un segment a été abordée au cycle 3, en liaison avec la symétrie axiale. Il convient au cycle 4 d'en formaliser la définition, ainsi que la propriété d'équidistance et sa réciproque. Cette dernière est utilisée pour une construction de la médiatrice à l'aide du compas.
- Les **hauteurs** d'un triangle, déjà introduites au cycle 3, sont réinvesties en liaison avec le calcul d'aire. D'autres **droites remarquables** du triangle peuvent être envisagées en situation, mais leur connaissance et leurs propriétés ne sont pas un attendu de fin de cycle. La **concourance des médiatrices** peut faire l'objet d'une activité de démonstration intéressante.
- Pour les configurations usuelles (**triangles et quadrilatères particuliers, cercles**), la définition et les propriétés usuelles déjà envisagées au cycle 3, font l'objet d'une formalisation précise au cycle 4 (propriétés métriques, parallélisme ou orthogonalité, éléments de symétrie). Il n'est cependant pas souhaitable de mener une étude exhaustive de ces propriétés. Le **parallélogramme**, déjà introduit au cycle 3, est revisité en classe de 5e, en dégageant ses propriétés en liaison avec la symétrie centrale. Les propriétés caractéristiques des quadrilatères particuliers peuvent être admises et utilisées dans certaines démonstrations, mais ne sont pas un attendu de fin de cycle.

1. Voir La géométrie dessinée et la géométrie abstraite - Jean-Philippe Rouquès et Catherine Houdement – Mars 2016

• Les **cas d'égalité des triangles** sont admis dès la 5e, essentiellement pour justifier qu'un triangle peut être construit connaissant certains de ses éléments métriques. Leur emploi dans certaines démonstrations doit demeurer très modeste. **Les triangles semblables** fournissent un vocabulaire commode dans les différents énoncés du théorème de Thalès.
• Sur les angles, les notions du cycle 3 sont entretenues et complétées. Il est utile de définir l'angle plat et de préciser sa mesure. La notion d'angles alternes-internes offre un vocabulaire commode pour donner une caractérisation angulaire du parallélisme. La **somme des mesures des angles d'un triangle** peut être exploitée notamment pour des problèmes de construction ou pour établir une propriété géométrique d'une figure.

EXEMPLES

1. Construire un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 4 cm et un angle aigu mesure 30°.
2. On considère un point C d'un cercle de diamètre [AB], distinct de A et B, et tel que BAC = 25°. Que peut-on dire du triangle ABC ? (Cet exercice peut se prêter à une différenciation si l'on veut généraliser le résultat à un point C quelconque du cercle, distinct de A et B.)

• Pour les théorèmes de **Pythagore** et de **Thalès**, il convient dans l'apprentissage de distinguer un énoncé direct et un énoncé réciproque. Chacun de ces théorèmes est formalisé en deux énoncés séparés, l'un direct et l'autre réciproque. Cependant, le distinguo entre énoncé direct et réciproque peut n'être pas perçu par tous les élèves ; c'est pourquoi, en évaluation, on accepte par exemple que l'élève invoque le théorème de Pythagore sans autre précision lorsqu'il applique l'un ou l'autre de ces énoncés.
• Le **théorème de Thalès** est amené avec progressivité, d'abord avec la configuration des « triangles emboîtés ». Les deux points de vue « commencer par le théorème de la droite des milieux, puis généraliser » ou « présenter le premier comme une conséquence du deuxième » sont acceptables, et relèvent de la liberté pédagogique. La démonstration du théorème de la droite des milieux n'est pas un objectif. Le théorème de Thalès peut être formalisé en termes de proportionnalité, ce qui est plus immédiatement perceptible et plus simple à manipuler que l'écriture de rapports de longueurs. Le lien avec les triangles semblables, les agrandissements et réductions, et les homothéties de rapport positif peut être établi à cette occasion. La configuration « en papillon » peut donner l'occasion de mentionner les homothéties de rapport négatif, notamment en liaison avec les logiciels de tracé ; cependant, au-delà de ce lien, ces dernières homothéties n'ont pas vocation à être développées au cycle 4.

Problèmes de construction

Les **problèmes de construction** constituent un champ privilégié de l'activité géométrique. Ces problèmes doivent être diversifiés : reproduction d'une figure, figures sous contrainte, protocoles ou algorithmes de construction, analyse et modélisation de situations complexes issues du monde réel, des arts visuels, de l'architecture, du design, etc. Ces problèmes développent l'aptitude à observer une figure et à la représenter dans le modèle géométrique abstrait pour y raisonner.

L'élève doit entretenir et consolider au cours du cycle 4 sa compétence dans la manipulation des **instruments de tracé et de mesure**, et se familiariser progressivement avec les fonctionnalités d'un **logiciel de géométrie dynamique** permettant des constructions. Pour certaines figures relevant d'une procédure **algorithmique**, un logiciel adapté peut être utilisé.

Exemple : la séquence d'instructions ci-contre permet au lutin du logiciel Scratch de construire un carré.

Transformations usuelles

La **symétrie axiale**, envisagée au cycle 3, fait l'objet d'une définition formalisée. La **symétrie centrale** est introduite dès la classe de 5e, en liaison avec le parallélogramme, pour lequel on admet que le point d'intersection des diagonales est centre de symétrie. Les symétries sont envisagées et définies en tant qu'applications ponctuelles ; leurs propriétés de conservation et de transfert peuvent être mises en évidence et utilisées, mais ne sont pas exigibles en évaluation.

Les autres transformations (**translations, rotations, homothéties**) sont introduites pour décrire ou pour construire certains objets, notamment les frises, pavages et rosaces. Elles peuvent être découvertes avec les fonctionnalités des logiciels de géométrie. Elles sont essentiellement utilisées avec ces logiciels, et leur définition formalisée en tant qu'applications ponctuelles n'est pas un attendu.

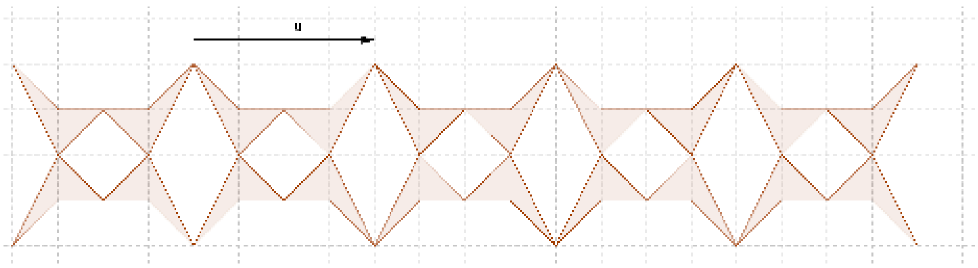
Frises, pavages, rosaces, polygones réguliers

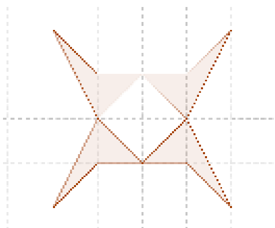
Les frises, pavages et rosaces sont introduits pour modéliser des situations issues des arts visuels (fresques, bas-reliefs, vitraux, ...), du design (papier peint, carrelages, logos, ...), de l'architecture. Ces objets ne font pas l'objet d'une définition formalisée ni d'une étude en soi. L'élève peut être progressivement amené à observer, décrire et analyser certaines de ces figures dans des domaines variés, puis à en construire des modèles géométriques, exacts ou simplifiés. Les logiciels de géométrie sont privilégiés pour ces constructions. On peut adopter un petit nombre de conventions de vocabulaire destinées à faciliter l'analyse et la compréhension de ces objets. Les indications suivantes sont un guide de présentation pour le professeur, avec un vocabulaire possible. Ce vocabulaire, qui peut être introduit en situation, ne doit ni faire l'objet d'une institutionnalisation en classe, ni être évalué. Chaque énoncé permet de conforter ce vocabulaire, en conciliant précision et simplicité.

- Une **frise** est une bande de plan dans laquelle un **motif** se répète régulièrement par une même **translation**, schématisée par un **vecteur**. Un motif associé à une translation la plus courte possible est un **motif de base** ; celui-ci peut lui-même être obtenu à partir d'un **motif élémentaire**, reproduit par d'autres transformations (symétries, rotations).

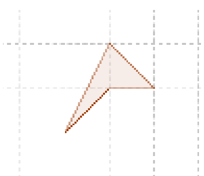
EXEMPLE

Voici une frise et un des deux vecteurs qui schématise une translation la plus courte.





Un motif de base



Un motif élémentaire associé

Retrouvez Éduscol sur

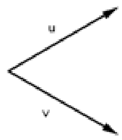
Un motif de base et un motif élémentaire associé ne sont pas uniques. Un motif de base peut être envisagé ou non avec un polygone ou une forme géométrique qui l'entoure, et qui peut par des translations successives recouvrir entièrement la bande de plan, quitte à négliger le chevauchement des bords. Chaque situation guidera le choix du motif envisagé, qui doit être précisé.

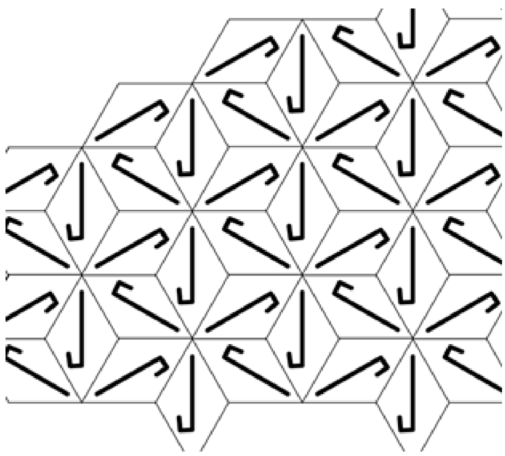
L'approche considérée permet de présenter le **vecteur** comme un **codage** de la translation. Elle n'est pas la seule : A et B étant deux points donnés, on peut aussi parler de translation qui transforme A en B.

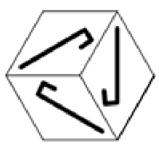
- Un **pavage** est une portion de plan dans laquelle un **motif** se répète régulièrement par deux translations, schématisées par des **vecteurs** non colinéaires (ou non parallèles). Comme pour les frises, un motif associé à deux translations les plus courtes possibles est un **motif de base** ; celui-ci peut lui-même être obtenu à partir d'un **motif élémentaire**, reproduit par d'autres transformations (symétries, rotations).

EXEMPLE
Voici un pavage, et deux vecteurs qui schématisent les translations les plus courtes.

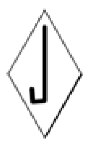
Comme pour les frises, la nature du motif (simple dessin ou dessin inclus dans un « pavé » qui l'entoure, comme le losange du pavage ci-avant) sera précisée dans chaque situation.







Un motif de base



Un motif élémentaire associé, reproduit par deux rotations

Retrouvez Éduscol sur

- Une **rosace** est formée d'un **motif** de base, qui se répète régulièrement par une rotation de centre O donné, et dont l'angle a pour mesure en degré un diviseur entier de 360. Une telle rosace est contenue dans un cercle de centre O.
- Les polygones réguliers, qui ne sont pas mentionnés en tant que tels dans le programme, n'ont pas à faire l'objet d'une définition formalisée. Ce sont néanmoins des objets d'étude intéressants qui, à l'instar des précédents, permettent de modéliser des situations naturelles (étoiles de mer, nids d'abeilles hexagonaux, ...), des objets technologiques (écrous, enjoliveurs d'une roue de voiture, ...), des œuvres d'art visuelles (rosaces, vitraux, ...), etc. Les polygones réguliers peuvent être vus comme des rosaces particulières, ce qui autorise une construction à l'aide de rotations.

Les outils numériques

Les outils numériques sont intégrés à la résolution de problèmes dans les constructions pour elles-mêmes, mais aussi dans la démarche d'investigation, dans l'observation, l'analyse et l'induction. L'élaboration d'un algorithme de construction sur le logiciel Scratch peut être proposée de façon différenciée à certains élèves, en formation. Cependant, cette élaboration n'est pas un objectif du collège et, de ce fait, ne doit pas être un objet d'évaluation.

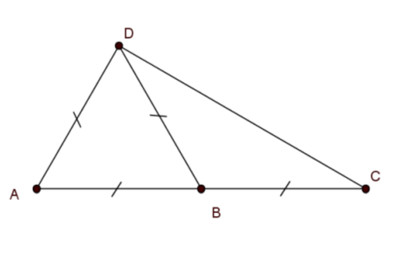
Le raisonnement et la démonstration

Le raisonnement intervient de façon diversifiée (déductif, par l'absurde, etc.). La **démonstration** est introduite avec prudence, sur des situations simples, qui nécessitent un argument de vérité dans le modèle de la géométrie abstraite[2], et sans décourager les élèves. Pour créer la possibilité d'îlots de démonstration, le professeur peut donner une liste – de longueur raisonnable – de définitions et théorèmes à connaître, en veillant à ce que cette liste soit cohérente et qu'elle permette de résoudre un nombre suffisant de problèmes.

Dans ces problèmes, il convient de dissocier l'exigence de résoudre la tâche, qui est source de motivation, de celle de communiquer cette résolution en rédigeant une démonstration. Cette dernière activité, pourtant essentielle et spécifique aux mathématiques, est plus délicate ; elle doit être conduite de façon progressive, non systématique, différenciée selon l'appétence et le niveau des élèves. Il convient surtout d'éviter les rédactions trop longues, trop lourdes, qui égarent les élèves et les détournent de la résolution d'un problème. **Si la rédaction formalisée d'une démonstration n'est pas un attendu du collège, l'exercice progressif du raisonnement est un objectif fondamental.**

EXEMPLE

La figure codée comprend quatre segments de même longueur, et les points A, B, C sont alignés.



Quelle est la nature exacte du triangle ACD ?

2. Voir à nouveau La géométrie dessinée et la géométrie abstraite - Jean-Philippe Rouquès et Catherine Houdement – Mars 2016

Retrouvez Éduscol sur

La solution peut d'abord être appréhendée à l'aide d'une figure tracée en vraie grandeur et en utilisant l'équerre, ou encore avec un logiciel de géométrie dynamique affichant les mesures d'angles, ou encore offrant un test d'orthogonalité.

Un débat peut s'ensuivre, autour de la question : le triangle est-il *exactement rectangle* en D, ou *à peu près* ? Tout dépend du contrat didactique : s'agit-il de la figure dessinée ou du modèle abstrait ?

Le choix du modèle abstrait justifie le fait de produire une preuve pour convaincre. La preuve peut être simplement trouvée par l'élève, par exemple en marquant successivement sur la figure les mesures des angles que l'on peut trouver : d'abord 60° dans le triangle équilatéral, puis 120° et 30° dans le triangle BCD isocèle en B, enfin 90° pour l'angle ($\widehat{ADC}$).

Le fait de rédiger une démonstration est un autre niveau d'exigence, qui peut être omis ou demandé à l'élève, en motivant la tâche par exemple par la nécessité de communiquer la preuve par écrit ou par téléphone.

Un exemple de modélisation en géométrie

EXEMPLE

Un professeur d'EPS trace un circuit de course à pied avec des plots :

- le plot n°2 est situé à 36 m au nord du plot n°1, qui est le plot de départ ;
- le plot n°3 est situé à 69 m à l'est du plot n°2 ;
- le plot n°4 est situé à 72 m au sud du plot n°3.

Chaque élève va d'un plot au suivant en ligne droite, et parcourt un certain nombre de fois le circuit 1-2-3-4-1. Il continue sur le même circuit jusqu'au plot d'arrivée, placé sur ce circuit de telle sorte le trajet total ait une longueur de 1,5 km.

Où le professeur doit-il placer le plot d'arrivée ?
Combien de fois un élève doit-il parcourir le circuit ?

Pour déterminer la distance entre les plots n°4 et n°1, un élève peut modéliser la situation de deux manières :

- par un dessin à l'échelle sur lequel il effectue une mesure de longueur ;
- par un schéma à main levée, support du raisonnement et de l'application du théorème de Pythagore.

Les deux méthodes sont correctes. Il est important de discuter avec les élèves de l'intérêt de chacune : la première ne nécessite pas de calculatrice, la deuxième permet d'obtenir une réponse plus précise ou plus sûre. Dans la même veine, voir l'activité Le cross du collège.

Différenciation

Dans ce thème, les possibilités de différenciation peuvent s'exercer de façon très diversifiée :

- en délivrant un accompagnement spécifique, que ce soit pour des travaux en classe ou hors la classe ;
- en changeant une variable didactique dans un problème (exemple : s'il s'agit de reproduire une figure par un agrandissement, le rapport 2, le rapport 1,6 et le rapport $\frac{7}{3}$ présentent des degrés de technicité graduels, et peuvent être donnés à différents élèves) ;
- en demandant une preuve sur un cas particulier à certains élèves, dans le cas général à d'autres ;
- en prolongeant une étude pour certains élèves ;
- en développant des scénarios pédagogiques collaboratifs (entraide, travail de groupe, ...) ;

• en offrant aux élèves des espaces où plusieurs types de démarches sont possibles (voir ci-avant l'exemple du circuit de course).

Exemples de situations d'apprentissage

Classes de problèmes

• Reconnaissance d'une configuration de base dans un environnement complexe.
• Programmes de construction.
• Compréhension et modification d'une construction donnée par un dessin ou un algorithme.
• Construction de frises, de rosaces, de pavages, à l'aide des instruments de tracé ou un logiciel.
• Calcul de grandeurs (longueurs, angles, aires).
• Modélisation de situations réelles (plans, frises, pavages) par des configurations et des transformations simples.
• Problèmes d'alignement, de parallélisme.
• Problèmes d'orthogonalité.

Exemples d'activités

Exemples de questions flash

Exemples de tâches intermédiaires :
• Le tangram
• Les frises de gouttes
• Analyse et construction d'un pavage

Exemples d'activités avec prise d'initiative :
• Le cross du collège
• La tour Charles le Téméraire
• La rosace de Sarajevo

Interdisciplinarité

L'interdisciplinarité donne du sens aux notions mathématiques, et doit s'exercer au sein de la classe et dans les enseignements complémentaires. Certaines notions de géométrie plane peuvent notamment trouver place dans le cadre des EPI (enseignements pratiques interdisciplinaires).

Par exemple :
• dans la thématique « Culture et création artistiques » : rosaces frises, pavages ;
• dans la thématique « Culture et création artistiques » : les figures géométriques dans le design, dans l'architecture, dans les jeux vidéo, dans la civilisation médiévale musulmane ;
• dans la thématique « Monde économique et professionnel » : la modélisation plane pour traiter certains problèmes liés au monde économique et professionnel ;
• dans la thématique « Sciences technologie et société » : distances astronomiques (estimation du rayon de la Terre par Ératosthène, de la distance Terre-Lune au XVIIIe siècle) ; travaux sur plans et cartes, etc.

Ressources complémentaires

- Géométrie au collège
- La géométrie dessinée et la géométrie abstraite - Jean-Philippe Rouquès et Catherine Houdement – Mars 2016
- Logiciel Pavages, créé par Pascal Peter
- Frises ornementales et groupes 11e chapitre Recherches en éducation : pour une culture mathématique accessible à tous : élaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes disponible sur www.enseignement.be
- Pavages rosaces et frises, réalisé à l'occasion de l'exposition 2000 Symétries du monde
- Frises et pavages, Philippe Garulo
- On trouvera de nombreuses activités faisant intervenir la construction de « belles » figures de géométrie plane, notamment liées aux arts plastiques, sur le site de l'IREM de Paris Nord.